

УДК 314.182, 312 Н 311

М.П. Кащенко<sup>1,2</sup>, Н.М. Кащенко<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

<sup>3</sup>Уральская компьютерная школа имени академика Н.Н. Красовского, г. Екатеринбург

## ОЦЕНКИ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ ЗЕМЛИ В ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

**Ключевые слова:** население Земли, динамика роста, феноменологические модели, ресурсные ограничения, прогноз численности населения.

Осуществляется сравнительный анализ динамики населения Земли в рамках двух феноменологических моделей. Предпочтение отдается предложенной модели, отражающей ресурсные ограничения. Проводится обсуждение результатов.

М.Р. Kashchenko, N.M. Kashchenko

## ESTIMATIONS OF THE NUMBER OF THE EARTH'S POPULATION IN PHENOMENOLOGICAL MODELS WITH TWO PARAMETERS

**Key words:** population of the Earth, dynamics of growth, phenomenological models, resource constraints, population forecast.

A comparative analysis of the dynamics of the Earth's population is carried out within the framework of two phenomenological models. Preference is given to the proposed model reflecting resource constraints. Discussion of results is in progress.

### 1. Введение. Формула С.П. Капицы

Рост населения Земли и наметившаяся тенденция к стабилизации его численности на некотором уровне  $N_{\max}$  ставят задачу уточнения прогнозов величины  $N_{\max}$ . В данной работе мы обратимся к достаточно простым двухпараметрическим моделям, опирающимся на исходное соотношение для скорости роста

$$\frac{dN}{dt} = \delta N^2, \quad \delta > 0. \quad (1)$$

После интегрирования (1) в пределах от  $t_0$  до  $t$  находим

$$N(t) = \frac{N(0)}{1 - N(0)\delta(t - t_0)} = \frac{C}{t_1 - t}, \quad C = \frac{1}{\delta}, \quad t_1 = t_0 + \frac{1}{N(0)\delta}. \quad (2)$$

В работах С.П. Капицы, подытоженных в его обзоре (Капица, 2010), закон (1) рассматривается как следствие перехода человечества к состоянию как единого целого. Чтобы избавиться от сингулярности, правая часть закона (1) сначала представляется в виде сингулярной функции времени с помощью интегрального решения (2)

$$\frac{dN}{dt} = \delta \frac{C^2}{(t_1 - t)^2}, \quad (3)$$

а затем в знаменателе (3) искусственно вводится слагаемое  $\tau^2$ ,

$$\frac{dN}{dt} = \delta \frac{C^2}{(t_1 - t)^2 + \tau^2}, \quad (4)$$

где время  $\tau$  (измеряемое в годах) интерпретируется как характерный внутренний масштаб, соизмеримый с продолжительностью жизни одного поколения. Отметим, что формальный переход от (3) к (4) эквивалентен перемножению комплексно сопряженных «времен» (с мнимыми добавками  $\pm i\tau$ ) при замене

$$(t_1 - t)^2 \rightarrow (t_1 - t + i\tau)(t_1 - t - i\tau) = (t_1 - t)^2 + \tau^2. \quad (5)$$

Интегрирование выражения (4) приводит к гладкой функции

$$N(t) = \frac{C}{\tau} \arccot \cot \left[ \frac{t_1 - t}{\tau} \right] = \frac{C}{\tau} \left\{ \pi - \arccot \cot \left[ \frac{t - t_1}{\tau} \right] \right\}. \quad (6)$$

Напомним, что функция  $f(x) = \arccot \cot x$  принимает максимальное значение  $\pi$  (при  $x \rightarrow -\infty$ ) и минимальное значение 0 (при  $x \rightarrow \infty$ ). При  $x = 0$  имеем  $f(0) = \frac{\pi}{2}$  и максимум скорости изменения функции. Соответственно, функция  $(\pi - f(x))$  принимает максимальное значение  $\pi$  при  $x \rightarrow \infty$  и минимальное значение 0 при  $x \rightarrow -\infty$ . Функция  $(\pi - f(x))$  кроме максимума скорости роста в точке  $x = 0$  обладает при  $x \approx -0,43$  и максимумом относительной скорости, описываемой выражением:

$$\frac{1}{(\pi - f(x))} \frac{d(\pi - f(x))}{dx} = - \frac{1}{(\pi - f(x))} \frac{df(x)}{dx}.$$

Напомним, что  $f(-x) = \pi - f(x)$ , и условие экстремума (равенство нулю первой производной от относительной скорости) сводится к равенству

$$xf(x) = -1/2.$$

В точке максимума для относительной скорости роста  $f(x) \approx 1.164698268$ . Следовательно,  $f(x)/\pi \approx 0,370735$ . Тогда по значению  $\tilde{N}$  в точке максимума относительной скорости роста предельное значение задается соотношением

$$N_{max} \approx \frac{\tilde{N}}{0,370735} \approx 2,69734466\tilde{N} \approx 2,7\tilde{N}. \quad (7)$$

На основе (4) и (6) в работе С.П. Капицы (2010) декларируется (в достаточно категоричной форме) «демографический императив», выражающийся в независимости роста человеческой популяции от ресурсных ограничений.

В нашей работе (М.П. Кащенко, Н.М. Кащенко, 2017а) показано, что форму записи (1) естественно связывать с половым способом размножения (взаимодействием мужских ( $m$ ) и женских ( $w$ ) коллективов), а серьезных оснований для категоричных утверждений не имеется. Поэтому ниже форма записи (6) рассматривается как один из

феноменологических вариантов двухпараметрического описания, где параметры  $C$  и  $\tau$  должны выбираться из сравнения с экспериментальными данными.

## 2. Формула для скорости роста $dN/dt$ при учете ресурсных ограничений и неявной зависимости $N(t)$

На наш взгляд, совершенно естественным способом устранения сингулярности является учет факторов, ограничивающих скорость роста. При феноменологическом описании это формально достигается, например, учетом в правой части (1) дополнительных слагаемых со степенями  $N$  выше 2 и подходящими знаками коэффициентов.

Применительно к ограничению закона экспоненциального роста

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad \lambda > 0, \quad (8)$$

исторически первым был вариант П. Ферхюльста (Verhulst, 1838), предложившего модифицировать правую часть (8) введением множителя  $[1-(N/K)]$ . Ясно, что константа  $K$  задает максимально возможное значение  $N_{\max} = K$ . Интегрирование уравнения Ферхюльста

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (9)$$

приводит к явной функции времени (названной логистической кривой)

$$N(t) = \frac{KN(0)\exp(\lambda t)}{K + N(0)[\exp(\lambda t) - 1]}, \quad (10)$$

показывающей, что при  $t \rightarrow \infty$   $N(t) \rightarrow K$  (если  $N(0) > K$ , то функция убывает, а если  $N(0) < K$ , то нарастает).

Следует отметить неспецифический характер ограничения, однако возрастание его роли при увеличении численности населения свидетельствует в пользу трактовки ресурсных ограничений. Поскольку подобные ограничения в равной мере должны относиться к взаимодействующим  $m$ - и  $w$ -коллективам, при устранении сингулярности естественно правую часть уравнения (1) дополнить квадратом множителя Ферхюльста:

$$\frac{dN}{dt} = \delta N^2 \left[1 - \frac{N}{K}\right]^2. \quad (11)$$

Насколько известно авторам, эта феноменологическая модель не применялась для оценок эволюции народонаселения. Из (11) очевидно, что имеется два стационарных решения:  $N=0$  и  $N = N_{\max} = K$ , из которых нас интересует верхнее предельное значение. Запишем, кроме того, выражение для относительной скорости роста

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \delta N \left[1 - \frac{N}{K}\right]^2. \quad (12)$$

Легко убедиться стандартным путем (из анализа производных по  $N$ ), что у скорости роста имеется максимум при  $N = K/2$ , а у относительной скорости роста при  $N = K/3$ . Значит, если на наблюдаемой зависимости  $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$  имеется точка максимума при некотором значении  $\tilde{N}$ , мы находим предельное значение в виде

$$K = 3\tilde{N}. \quad (13)$$

Соответственно, в случае максимума скорости роста  $\frac{dN}{dt}$  при  $N = \bar{N}$  имеем

$$K = 2 \bar{N}. \quad (14)$$

Решение уравнения (11) не позволяет выразить зависимость  $N(t)$  в явном виде, однако это не создает особых препятствий. Действительно, интегрируя (12) от  $N(0)$  до  $N$  при изменении времени от  $t_0$  до  $t$ , находим:

$$\frac{1}{N(0)} - \frac{1}{N} - \frac{1}{K-N(0)} + \frac{1}{K-N} + \frac{2}{K} \ln \left| \frac{N}{N(0)} \left( \frac{K-N(0)}{K-N} \right) \right| = \delta(t - t_0). \quad (15)$$

Сравнение (13) и (7) показывает, что асимптотические оценки предельных значений в формулах (15) и (6) различаются на 10 %, поэтому отбор той или иной формы описания диктуется степенью близости описания к реально наблюдаемым данным.

### 3. Динамика населения Земли

#### 3.1. Данные о численности $N$ в 1951-2017 гг.

Начало отсчета наиболее достоверных данных о численности населения Земли и скоростях его роста относится, по-видимому, к 1951 году. На рис. 1 приведена наблюдаемая зависимость согласно данным мониторинга динамики народонаселения на сайте [http://countrymeters.info/ru/World#historical\\_population](http://countrymeters.info/ru/World#historical_population).

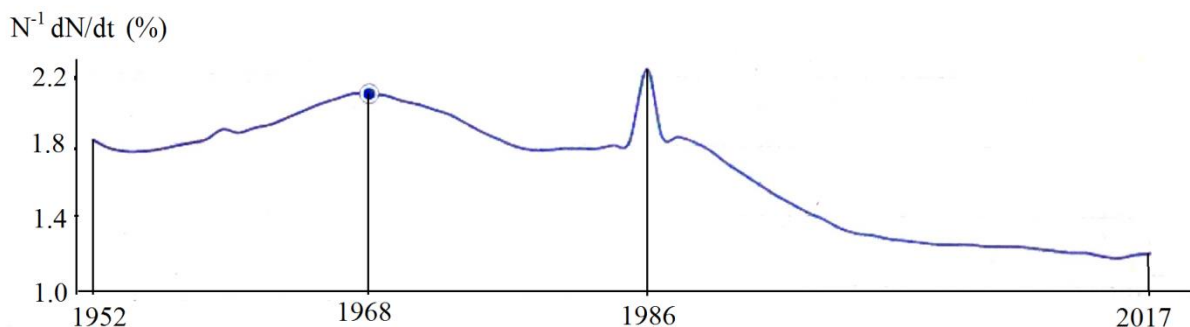


Рис.1. Данные об относительной скорости роста населения Земли (вертикальные линии нанесены авторами).

Прежде всего, отметим, что имеется два отчетливых максимума для относительной скорости роста. Максимуму в 1968–69 гг., согласно табличным данным на том же сайте, соответствует  $\tilde{N}_1 \approx 3,5 \cdot 10^9$ , а максимуму в 1986 г.  $\tilde{N}_2 \approx 4,9 \cdot 10^9$ .

Анализ динамики скорости роста населения достаточно крупных стран показывает, что появление в 1986 г. сравнительно узкого пика (0,42 %) на «фоне» (1,82 %) снижающейся скорости роста связано с вкладом от небольшой группы стран, максимумы скоростей роста которых имеют датировку, близкую к 1986 г. Например: Египет (2,76 % в 1986, макс. 2,8 % в 1987 г.), Иран (4,07 % в 1986, макс. 4,17 % в 1984 г.), Нигерия (2,62 % в 1986, локальный макс. 2,67 % в 1988 г.), Пакистан (3,32 % в 1986, макс. 3,4 % в 1983 г.). Разумеется, не только благодаря перечисленным странам (с относительно небольшим населением), но и благодаря более крупным странам, имеющим относительную скорость роста в 1986 г. выше «фоновой», достигается конечное значение второго максимума 2,24 %. Достаточно указать Индию (2,26 %), Бангладеш (2,72 %), Эфиопию (3,24 %), Филиппины (2,73 %) и ряд других стран с меньшим населением.

ем. Это отражает немонотонность и неравномерность зависимостей относительных скоростей роста для различных стран. В частности, появления первого «пологого» максимума в 1968–1969 гг. явно коррелирует с максимумом относительной скорости роста (на уровне 2,73–2,71 %) населения Китая в 1967–1972 гг. Отметим, что и максимум относительной скорости роста упоминавшейся Бангладеш (3,33–3,34 %) приходится на 1967–1968 гг.

В связи с этим заметим, что зависимости относительных скоростей роста отдельных стран с течением времени часто имеют вид модулированных затухающими колебаниями зависимостей, причем амплитуды и начальные фазы колебаний для разных стран отличаются. Результирующая кривая на рис. 1 отражает тот факт, что, в основном, колебательные модуляции усредняются. Второй же «узкий» пик, приходящийся на 1986 г., соответствует некомпенсированной части колебательных составляющих над плавной кривой, характеризующей среднюю относительную скорость роста всего населения Земли.

После выяснения причин появления максимумов на кривой, приведенной на рис.1, дальнейший сравнительный анализ хода кривых (15) и (6) проводится, естественно, без учета второго максимума.

### 3.2. Обработка данных в модели с ресурсным ограничением роста

Выполним калибровку параметров по данным для первого максимума на рис.1. Для этого случая, согласно (7),  $N_{\max 1} \approx 2,7 (3,5) = 9,45$  млрд., а согласно (13),  $N_{\max 2} \approx 3 (3,5) = 10,5$  млрд. Разумеется, расхождение на 1 миллиард при прогнозировании роста населения трудно считать удовлетворительным. Совершенно очевидно, что из-за стремления к разным асимптотам, значения  $N_1(t)$ , найденные с помощью (6), будут меньше значений  $N_2(t)$ , задаваемых (15). Для упрощения расчетов неявную форму функции (15) удобно представить для отношения  $\alpha(t) = N_2(t)/K$ . В качестве начального условия в (16) учтено  $\alpha(0) = 1/3$ .

$$\frac{2\alpha-1}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{3}{2} + 2\ln \left| \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right| = \delta K \Delta t \quad (16)$$

Кроме того, учтем, что данные (2,09%) для относительной скорости роста совпадают для начал 1968 и 1969 гг., поэтому максимальное значение достигается предположительно в середине 1968 года. Тогда началу отсчета времени  $t_0 = 1968,5$  г. сопоставляем значение  $\tilde{N} = 3,521686 \cdot 10^9$ , равное полусумме значений для 1968 и 1969 гг., незначительно увеличиваем (до 2,091 %) относительную скорость в точке ожидаемого максимума и находим параметры  $K = 10,565058 \cdot 10^9$ ,  $\delta K \approx 0,141075$ . Данные расчета с указанием реального  $\Delta t_r$  и расчетного  $\Delta t_c$  интервалов времени приведены в табл. 1 (в (16) интервал  $\Delta t$  соответствует  $\Delta t_c$ ). Значение  $\Delta t_c$  находилось из (16) для значений  $\alpha$ , определявшихся делением на  $K$  данных о численности населения, приведенных во втором столбце. В последнем столбце приведены значения  $N_c$ , вычисленные с помощью пакета «Mathcad Professional» для интервалов времени, приведенных в соседнем столбце. Значения  $\alpha_c$  находились делением  $N_c$  на  $K$ .

Из трех приведенных данных для 1986, 2000 и 2017 гг. наибольшее расхождение имеет место для начала 2000 г. – наблюдаемое значение 6,09 млрд. в расчете достигается с годичным опережением (соответствующим превышению численности на 109 млн. человек), хотя в процентном отношении отклонение не очень велико (1,8%). В то же время, сравнение с данными о численности населения 1986 и 2017 гг. выглядит вполне удовлетворительным (отклонения 0,32% и 0,1 %, соответственно). Последние 3

строки относятся к прогнозируемым результатам, где указаны годы достижения рубежных значений 8, 9 и 10 млрд.

Таблица 1

Результаты расчетов в рамках модели (15) при выборе  $t_0=1968,5$  г.

Год	N, млрд. (на 1 января)	$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}(\%)$	Результаты расчета $\Delta t_c$ (в годах)			Результаты та $N_c$ (млрд.)		
			$\alpha$	$\Delta t_r$	$\Delta t_c$	$\alpha_c$	$\Delta t_r$	$N_c$
1968,5	3,521686	2,091 (2,09)	1/3	0	0	1/3	0	3,521686
1986	4,898971	2,24 (1,88)	0,463696	16,5	16,3195	0,465203	16,5	4,914897
2000	6,089825	1,29 (1,41)	0,576412	30,5	29,2494	0,586742	30,5	6,198963
2017	7,486520	1,2 (0,85)	0,708611	47,5	47,3580	0,709328	47,5	7,494091
$\approx 2026$	8	(0,596)	0,765128	?	56,3928	0,757595	56,5	8,004035
$\approx 2054$	9	(0,264)	0,851865	?	84,7483	0,851890	84,8	9,000267
$\approx 2154$	10	(0,038)	0,946516	?	186,15	0,946538	186,3	10,00023

Заметное различие имеется между наблюдавшимися и расчетными данными для относительных скоростей роста (результаты расчета приводятся в круглых скобках третьего столбца). Эти данные получены элементарной подстановкой значений  $\alpha_c$  в формулу (12), после перехода от  $N(t)$  к переменной  $\alpha(t)$  при фиксированном значении  $\delta K \approx 0.141075$ . Ясно, что подобное расхождение формально можно устранить введением зависимости  $\delta(t)$ .

### 3.3. Обработка данных в рамках модели С.П. Капицы

Данные табл. 1 полезно сопоставить с расчетами в модели (6), выбирая то же начало отсчета 1968,5 г. Нетрудно, однако, убедиться, что равенство расчетной максимальной относительной скорости с наблюдаемой величиной 2,09% несовместимо со значением  $\tau=45$  лет (Капица, 2010). Действительно, максимум относительной скорости роста для нормированной функции  $\alpha(t) = N(t)/K$

$$\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \arccot \cot \left[ \frac{t_1 - t}{\tau} \right], \quad \frac{t_1 - t}{\tau} = \frac{t_0 - t}{\tau} + \frac{1}{\tau N_0 \delta}, \quad (17)$$

сопоставляется с начальным моментом времени  $t_0$ . Поэтому, во-первых, должно выполняться условие, соответствующее наличию экстремума:

$$\alpha(t_0) = \frac{1}{\pi} \arccot \cot \left[ \frac{1}{\tau N_0 \delta} \right] = \alpha_0 \approx \frac{1}{\pi} \arccot [0,43] \approx 0,370513, \quad (18)$$

из которого следует

$$\tau N_0 \delta \approx 1/0,43 \approx 2,32558. \quad (19)$$

Во-вторых, должно удовлетворяться требование согласования значений расчетных и наблюдаемых величин максимальных относительных скоростей роста

$$\left[ \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \right]_0 = \frac{1}{\tau \pi \alpha_0} \frac{(\tau N_0 \delta)^2}{(1 + (\tau N_0 \delta)^2)} = 0,02091. \quad (20)$$

Подставляя в (20) значения  $\tau N_0 \delta \approx 2,32558$  из (19) и  $\alpha_0$  из (18), находим

$$\tau \approx 34,67 \text{ лет}. \quad (21)$$



Напомним, в работах С.П. Капицы, в основном, использовались значения  $\tau = (40 - 45)$  лет, которые, как следует из проведенного анализа, несовместимы с наблюдаемыми значениями максимума относительной скорости роста. Не случайны, по-видимому, и попытки прогнозирования на основе совпадения максимумов скоростей роста (не относительной скорости), условные позиции которых (в силу меняющихся процедур и масштабов усреднения) неоднократно менялись. Поэтому менялись и прогнозы: 15 млрд. (предполагался максимум в 2010 г.), 12 млрд. (точка предполагаемого максимума в 2000 г.), 11,4 млрд. (выбор точки максимума в 1995 г.), в последнем же обзоре (Капица, 2010) упоминается интервал 10–11млрд. Впрочем, этот интервал, скорее всего, указан на основе других прогнозов, в том числе выполняемых с помощью имитационных моделей. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов в рамках модели (6) при выборе  $t_0=1968,5$  г.

Год	N, млрд. (на 1 января)	$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ (%)	Результаты та $N_c$ (млрд.) $\tau = 34,67$ (в годах)			Результаты расчета $N_c$ (млрд.) $\tau = 27,946$ (в годах)		
			$\alpha_c$	$\Delta t_r$ (годы)	$N_c$	$\alpha_c$	$\Delta t_r$ (годы)	$N_c$
1968,5	3,521686	2,091	0,370370	0	3,521686	0,370370	0	3,521686
1986	4,898971	2,24	0,514605	16,5	4,891268	0,550634	16,5	5,233719
2000	6,089825	1,29	0,634525	30,5	6,03110	0,686002	30,5	6,520383
2017	7,486520	1,20	0,740169	47,5	7,03523	0,787648	47,5	7,486520
$\approx 2026$	?	?	0,778435	56,4	7,398950	0,821130	56,4	7,804760
$\approx 2054$	?	?	0,853242	84,7	8,109978	0,883160	84,7	8,394347
$\approx 2154$	?	?	0,936468	186,3	8,901034	0,949390	186,3	9,023862

Видно, что для случая  $\tau = 34,67$  года имеется хорошее совпадение с данными для 1986 г., однако уже в 2000 г., намечилось отставание от реальных цифр, вылившееся в значимое расхождение с данными для 2017 г. Формально, уменьшив параметр  $\tau$  до  $\tau = 27,946$  года, легко обеспечить точное равенство расчетной и наблюдаемой численности населения в 2017 г., но тогда, как очевидно из данных табл. 2, будет существенное расхождение для других дат. Три последние строки, как и в табл.1, содержат прогностические оценки, причем даты (2026, 2054, 2154) взяты из табл.1, где они соответствовали достижению рубежей 8, 9, и 10 млрд. Видно, что модель (6) ведет к существенному запаздыванию роста населения по сравнению с моделью (15). Это было заранее ясно из-за разности на 1млрд. асимптотических значений для рассматриваемых моделей.

Полезно отметить также, что при одинаковых стартовых значениях  $N_0$  и относительной скорости роста в точке отсчета  $t_0 = 1968,5$  г. расчетные значения  $N$  в модели (15) выше, а в модели (6) ниже, чем реально наблюдавшиеся величины  $N_r$ .

#### 4. Общее обсуждение результатов

В целом, соответствие между расчетными данными простых двухпараметрических моделей и известными данными последних десятилетий можно считать удовлетворительным. Некоторое предпочтение, на наш взгляд, остается за выбором модели с ресурсным ограничением скорости роста. Но и использование модели (6) в качестве прогностического инструмента на сравнительно небольших интервалах времени представляется приемлемым в силу простоты аналитического описания.

Анализ моделей показывает, что при периодических корректировках параметров (не чаще, чем один раз за десятилетие) можно обеспечить точность прогнозирования на уровне 1 %.

В рамках модели с ресурсно ограниченной скоростью роста оценку для  $N_{\max} \approx 10,6$  млрд. следует, на наш взгляд, рассматривать как достаточно реалистичную величину. Формально, если не отбрасывать второй максимум на рис.1 (см. обсуждение в п. 3.1), значение  $N_{\max} \approx 10,6$  млрд. является оценкой снизу. Однако и верхняя граница вряд ли отклонится более чем на 10 %, поскольку в оценке, базировавшейся на точке отсчета  $t_0 = 1968,5$  г., интегрально участвовало все население, а пиковое значение 2,24 % относительной скорости роста в 1986 г. достаточно близко к использованному значению 2,09 %, имевшему место в 1968,5 г. В связи с этим маловероятной представляется оценка сверху для  $N_{\max} \approx 14,7$  млрд., формально получаемая в ресурсно зависимой модели утроением численности населения 4,9 млрд., если в качестве точки отсчета выбирается 1986 год (второй максимум на рис.1). Однако выяснение причин появления второго максимума в п. 3.1 позволяет считать верным выбор именно максимума 1968,5 года для калибровки параметров теории. Поэтому вполне закономерно, что описание данных для известной после 1968 года численности населения выглядит удовлетворительным.

Если ориентироваться на сравнительный анализ предсказаний анализировавшихся моделей, то можно допустить, что тенденция превышения расчетных значений  $N_c$  в модели (15) над известными значениями  $N_r$  сохранится вплоть до асимптотической величины. Тогда  $N_{\max} \approx 10,6$  млрд. можно интерпретировать и как верхнюю границу для  $N_r$ .

Очевидно, что сравнение данных о динамике населения Земли в течение следующего десятилетия с расчетными значениями в рамках предложенной модели, позволит провести калибровку параметров (если в этом будет необходимость), обеспечивающую высокую точность последующего прогнозирования.

Принципиальным, на наш взгляд, является вывод о связи перехода к стабилизации численности населения с возникающими ограничениями, когда человечество в ходе эволюционного прогресса переходит к стандартам высокого качества жизни, трудно совместимого с его ресурсным обеспечением. Делая такой вывод, авторы, несомненно, разделяют позицию Римского клуба. На наш взгляд, не случайно, что начало отсчета  $t_0 = 1968,5$  г. оказывается близким к дате (1972 г.) публикации знаменитого доклада о пределах роста, где прозвучали серьезнейшие предупреждения о близости к пределам ресурсных ограничений и опасности необратимого разрушения всей биосферы. Повидимому, к указанному времени эти тревожные симптомы стали уже заметны экспертам и четко проявились при рассмотрении глобальных моделей. Причем последующий мониторинг подтвердил негативные прогнозы (Медоуз и др., 2007). Поэтому трактовка демографического перехода (Капица, 2010) как феномена, не связанного с ресурсными ограничениями, маскирует остроту реальных проблем.

В методическом отношении вывод о реальном проявлении ресурсных ограничений в шестидесятых годах прошлого века означает, что множители Ферхюльста (или их аналоги) должны обязательно учитываться с некоторого момента  $t_s$  в прошлом, до которого удовлетворительно работала модель неограниченного роста. Например, в простейшем случае функция Ферхюльста модифицируется домножением  $N$  на функцию Хевисайда  $\theta(t-t_s)$ . Очевидно также, что ограничивающие факторы могут измениться, в частности, из-за принятых политических решений. Тогда потребуется корректировка модели, которую всегда можно выполнить, вводя необходимые поправки с помощью той же функции включения Хевисайда.

Совершенно очевидно, что использованная модель должна быть дополнена учетом естественной убыли населения, актуальность которого нарастает при прогнозиро-



вании глобальной численности населения по мере приближения  $N$  к значению  $K$ . Такой учет достигается включением в правую часть уравнения (11) слагаемого  $-dN$ , где  $d > 0$ . В результате уменьшится значение  $N_{\max}$ , отвечающее стационарному решению. Это еще один аргумент в пользу того, что приведенная выше оценка вряд ли будет существенно превышена. Разумеется, при использовании реальных данных о скорости роста населения эффект естественной убыли населения неявно учитывался при калибровке параметров модели в точке  $t_0$  начала отсчета, однако с течением времени точность такой калибровки уменьшается.

Понятно, что учет убыли населения принципиально необходим для прогнозирования численности населения в странах, где демографический переход произошел, а ориентация на высокий уровень качества жизни привела к снижению рождаемости, в заметной степени связанной с высоким процентом прерываний беременности. В результате уже не обеспечивается даже простое воспроизводство численности коренного населения. Ясно, что такой процесс происходит при выполнении неравенства

$$\delta_{\alpha} \alpha [1 - \alpha]^2 < d. \quad (22)$$

В подобной ситуации оказались европейские страны и Россия. Следовательно, на динамику численности их населения существенно влияют миграционные потоки, которые также должны учитываться при прогнозе, касающемся отдельной страны.

Заметим, что при феноменологическом описании возможен учет как явной зависимости  $\delta$  от времени, так и неявной, путем введения функции  $\delta(N)$ . В частности, в предыдущей работе (М.П. Кащенко, Н.М. Кащенко, 2017а) отмечалось, что величина  $\delta$  в предельном случае обратно пропорциональна  $N$ . Ясно, что подобный вариант в принципе снимает с обсуждения вопрос о механизме гиперболического роста даже в отсутствие каких-либо ограничений. В связи с этим представляет интерес, например, модель, в которой вместо параметра  $\delta$  фигурирует функция

$$\delta(N) = \frac{b}{a+N}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (23)$$

где в общем случае  $a$  и  $b$  являются функциями времени. Разумеется, на относительно коротких интервалах времени можно использовать фиксированное значение «параметра»  $\delta$ , периодически корректируя его величину.

### Заключение

Проведенный анализ показал, что двухпараметрические модели роста населения Земли позволяют обеспечить при опоре на надежные статистические данные вполне приемлемую точность прогнозирования. Причем модель, учитывающая ресурсные ограничения, представляется наиболее органичной. При переходе к трехпараметрическим моделям в содержательном отношении наиболее существенным является учет естественной убыли населения, а также учет зависимости  $\delta(t)$ . Ясно, однако, что и прогнозы на основе двухпараметрических моделей (с периодической коррекцией значений параметров) полезны в силу своей простоты, наглядности и приемлемой точности.

### Список использованной литературы

- Капица С.П. К теории роста населения Земли // Успехи физических наук. 2010. Т. 180. № 12. С. 1337-1346.
- Кащенко М.П., Кащенко Н.М. Сферы общения и скорость роста населения // Эко-потенциал. 2017. № 4 (20). С. 112- 119.

*Медоуз Д., Рандерс Й., Медоуз Д.* Пределы роста. 30 лет спустя / Пер. с англ. М.: ИКЦ «Академкнига», 2007. 342 с. ([file:///C:/Users/F330~1/AppData/Local/Temp/Rar\\$DIa0.470/Medouz\\_Predelyi\\_rosta.\\_30\\_let\\_spustya\\_d3f347\\_327864.fb2](file:///C:/Users/F330~1/AppData/Local/Temp/Rar$DIa0.470/Medouz_Predelyi_rosta._30_let_spustya_d3f347_327864.fb2)).

*Verhulst P.F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance mathématique et physique. 1838. Vol. 10. P. 113-121.

**Рецензент статьи:** доктор физ.-мат наук, профессор кафедры физики УГЛТУ, профессор кафедры высшей математики Института фундаментального образования УрФУ Чашина Вера Геннадиевна.